Colle du 19 septembre: Suites numériques

2.1 Première série

Exercice 1:
1. *(Classique)* Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers l_1 et l_2. Que dire de la suite $w_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}}{n+1}$?
2. Étudier la limite de $u_n = \left(1 + \frac{in}{n^2-1}\right)^n$.
3. Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_n + b_n + c_n \to 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} \to 3$. Que dire de ces trois suites?

Exercice 2: Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = ax + b$$

Exercice 3: Étudier la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $u_{n+2} = \ln(1 + u_{n+1}) + \ln(1 + u_n)$.

2.2 Deuxième série

Exercice 1: *(Classique)* Soit (x_n) une suite à valeurs réelles positives.
Posons $y_n = \sqrt{x_0 + \sqrt{x_1 + ... + \sqrt{x_n}}}$
1. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2$, alors $y_n \to 2$.
2. Quelle est la limite de (y_n) si $x_n = 2\lambda^{2^{n+1}}$?
3. Montrer que y_n est convergente si $x_n = n^n$. Pouvez-vous construire une suite (x_n) telle que $y_n \to +\infty$?

Exercice 2: Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2^{n+1} divise $E\left((1+\sqrt{3})^{2n+1}\right)$.

Exercice 3: Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n^2 + u_n - u_{n+1} \to 0$. Montrer que $u_n \to 0$.

2.3 Troisième série

Exercice 1: Soit $(a_n)_n$ une suite croissante positive. On suppose que (a_n/n) est majorée et que $\forall m, n \in \mathbb{N}, a_{mn} \geq m a_n$. Montrer que la suite (a_n/n) converge.

Exercice 2:
1. *(Classique)* Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k!}$.
2. Soit $a > 0$. Étudier la suite $v_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a+k}{n}\right)^n$.

Exercice 3: Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant:

$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$$

Exercice 4: *(Classique)* Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que l'écriture décimale de 2^n commence par 2011.